ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 37, No. 3, 1980

POLYNOME DE HILBERT-SAMUEL DANS LES ALGEBRES ENVELOPPANTES ET LES ALGEBRES DE GROUPE

PAR

J. ALEV

ABSTRACT

An analogue of the Hilbert–Samuel polynomial is considered with respect to the augmentation ideal of the enveloping algebra of a finite dimensional nilpotent Lie algebra and the group ring of a finitely generated, torsion-free nilpotent group. Then, the Hilbert series of finitely generated modules are rational.

Introduction

Dans ce travail nous étudions un analogue du polynôme de Hilbert–Samuel en l'idéal d'augmentation des algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie nilpotentes et des algèbres de groupes nilpotent de type fini sans torsion. On obtient une fonction non nécessairement polynomiale, mais à croissance polynomiale et dont la dimension au sens de Gelfand–Kirillov se comporte comme le degré du polynôme attaché à l'idéal maximal d'un anneau local, noethérien et commutatif ([1] et [2]). On prouve la rationalité de la série de Hilbert d'un module gradué de type fini sur le gradué associé à l'idéal d'augmentation d'une algèbre enveloppante d'algèbre de Lie nilpotente et d'un anneau de groupe nilpotent de type fini.

1.1. Soit A un anneau noethérien à gauche et I un idéal bilatère de A tel que A/I soit artinien à gauche. Supposons que I soit engendré par un système centralisant $x_1, x_2, \cdots, x_s$ ([7]). Pour tout entier naturel k, I^k/I^{k+1} est un A/I-module à gauche de longueur finie. ($A = I^0$). Posons:

$$f_I(n) = l_A(A/I^{n+1}).$$

1.2. Soit x un élément central dans A et J un idéal bilatère de A. Notons par $J : Ax$ l'idéal bilatère $\{b/bAx \subseteq J\}$.

Received June 26, 1979 and in revised form March 13, 1980

1.3. LEMME. *Avec les notations du* 1.1 *et du* 1.2, *on a*:

$$f_{I/Ax_1}(n) = f_I(n) - l(A/I^{n+1} : Ax_1).$$

PREUVE. En effet, $(A/Ax_1)/(IAx_1)^n$ est isomorphe à $A/I^n + Ax_1$. On a alors:

$$\begin{aligned} f_I(n) - f_{I/Ax_1}(n) &= l(A/I^{n+1}) - l(A/I^{n+1} + Ax_1) \\ &= l((I^{n+1} + Ax_1)/I^{n+1}) = l(A/I^{n+1} : Ax_1). \end{aligned}$$

■

1.4. PROPOSITION. *Avec les hypothèses du* 1.1, $f_I(n)$ *est majoré par le polynôme* $\binom{n+s}{s} l(A/I)$.

PREUVE. On procède par récurrence sur s.

Si $s = 1$, $I = Ax_1$ et par conséquent $I^k/I^{k+1} = Ax_1^k/Ax_1^{k+1}$ est un A/I-module monogène de longueur majorée par $l(A/I)$. Il vient alors:

$$f_I(n) = \sum_{k=0}^{n} l(Ax_1^k/Ax_1^{k+1}) \leqq (n+1) l\left(\frac{A}{I}\right) = \binom{n+1}{1} l\left(\frac{A}{I}\right).$$

Si $s > 1$, on a évidemment $I^n \subset I^{n+1} : Ax_1$ pour tout entier naturel n; par conséquent, $f_I(n-1) \geqq l(A/I^{n+1} : Ax_1)$. On en déduit:

$$f_I(n) - f_I(n-1) \leqq f_{I/Ax_1}(n) \tag{1.4.1}$$

en utilisant le lemme 1.3. Or l'anneau $\bar{A} = A/Ax_1$ et l'idéal $\bar{I} = I/Ax_1$ vérifient les hypothèses de la proposition. Par récurrence, on obtient:

$$f_{I/Ax_1}(n) \leqq \binom{n+s-1}{s-1} l\left(\frac{\bar{A}}{\bar{I}}\right) = \binom{n+s-1}{s-1} l\left(\frac{A}{I}\right). \tag{1.4.2}$$

En utilisant les inégalités (1.4.1) et (1.4.2) il vient:

$$f_I(n) - f_I(n-1) \leqq \binom{n+s-1}{s-1} l\left(\frac{A}{I}\right),$$

$$f_I(n-1) - f_I(n-2) \leqq \binom{n-1+s-1}{s-1} l\left(\frac{A}{I}\right),$$

$$\dots \qquad \dots \qquad \dots$$

$$f_I(1) - f_I(0) \leqq \binom{1+s+1}{s-1} l\left(\frac{A}{I}\right).$$

On a alors:

$$f_I(n) \leqq l\left(\frac{A}{I}\right) + \sum_{k=1}^{n} \binom{k+s-1}{s-1} l\left(\frac{A}{I}\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{k+s-1}{s-1} l\left(\frac{A}{I}\right) = \binom{n+s}{s} l\left(\frac{A}{I}\right)$$

■

1.5. Remarque. En algèbre commutative, la proposition 1.4 se démontre en remarquant que le gradué associé à l'idéal I est une A/I-algèbre de type fini et par conséquent le résultat se déduit de la même propriété bien connue de l'idéal d'augmentation d'une algèbre de polynômes. En algèbre non commutative, le gradué associé est quotient du produit libre de A/I avec $Z(A/I)\langle x_1, x_2, \cdots, x_s\rangle$ où $Z(A/I)\langle x_1, x_2, \cdots, x_s\rangle$ est l'algèbre libre déterminée par les variables $x_1, x_2, \cdots, x_s$ sur le centre de A/I. Dans cette dernière algèbre la croissance étudiée étant exponentielle, on no peut rien conclure sur les quotients.

2.1. Soit A un anneau et I un idéal engendré par un système centralisant $x_1, x_2, \cdots, x_t$. Soit J un idéal bilatère de A. On dit que *I vérifie la propriété d'Artin Rees forte par rapport à J* s'il existe un entier k, tel que:

$$\text{si } n \geqq k, \text{ alors: } I^n \cap J = I^{n-k}(I^k \cap J).$$

Définition. On dira que l'idéal bilatère I vérifie la propriété *d'Artin Rees forte restreinte* si I vérifie la propriété d'Artin Rees par rapport aux idéaux:

$$Ax_1 + Ax_2 + \cdots + Ax_i, \qquad 1 \leqq i \leqq t-1.$$

2.2. Remarque. Dans les hypothèses du 2.1, si I vérifie la propriété d'Artin Rees forte restreinte, alors l'idéal I_j vérifie aussi la propriété d'Artin Rees forte restreinte dans l'anneu A_j où

$$A_j = \frac{A}{Ax_1 + Ax_2 + \cdots + Ax_j} \quad \text{et} \quad I_j = \frac{I}{Ax_1 + Ax_2 + \cdots + Ax_j}$$

pour $1 \leqq j \leqq t-1$, ce qui se vérifie par récurrence finie sur j.

2.3. Définition. Soit f une fonction croissante définie sur N et à valeurs entières positives. Nous allons supposer:

(a) Il existe un polynôme $q(X) \in \mathbf{Q}[X]$ tel que $f(n) \leqq q(n)$ pour tout entier naturel n.

(b) Il existe un entier l strictement positif et un polynôme $p(X) \in \mathbf{Q}[X]$ tels que:

$$0 < p(n) \leqq f(n) \qquad \text{pour } n \neq 0, \quad n \equiv O(l).$$

Il est alors clair qu'il existe un polynôme de plus haut degré d vérifiant la condition (b) en présence de la condition (a). On a, en particulier, $d \leqq \deg q(X)$. Cet entier d qui est uniquement déterminé par la fonction f va être appelé le "degré" de f.

Il est clair aussi que si le polynôme $p(X)$ réalise la condition (b) avec l'entier l, il la réalise aussi avec tout entier multiple non-nul de l.

2.4. Lemme. *Soit A un anneau et I un idéal engendré par une A-suite centralisante $x_1, x_2, \cdots, x_s$* ([11]). *Si I vérifie la propriété d'Artin Rees forte restreinte, alors*:

Il existe un entier positif k tel que:

$$(I^n : Ax_1) \subset I^{n-k} \quad \textit{dès que } n \geqq k.$$

Preuve. Elle se fait comme dans le cas commutatif ([12], page 273). ■

2.5. Théorème. *Soit A un anneau noethérien à gauche et I un idéal propre de A tel que A/I soit artinien. Supposons de plus que I soit engendré par une A-suite centralisante $x_1, x_2, \cdots, x_s$. Si I vérifie la propriété d'Artin Rees forte restreinte, alors la fonction*:

$$f_I(n) = l_A(A/I^{n+1}).$$

est de degré s, au sens de la définition 2.3.

Preuve. Elle se fait par récurrence sur s. Si $s = 1$, alors $I = Ax_1$ et $I^{k+1} \subsetneqq I^k$ pour tout entier naturel k, car x_1 est non diviseur de 0 et non inversible. Comme $A/I \simeq Ax_1^k/Ax_1^{k+1}$ pour tout entier naturel k, on en déduit que:

$$f_I(n) = (n+1)l\left(\frac{A}{I}\right).$$

Si $s > 1$, la condition (a) de la définition 2.3 est vérifiée d'après la proposition 1.4. Considérons maintenant l'anneau $\bar{A} = A/Ax_1$.

D'après la remarque 2.2, $\bar{I}$ vérifie la propriété d'Artin Rees forte restreinte. Il s'ensuit par récurrence qu'il existe un entier l_1 strictement positif et un polynôme $p(X) \in \mathbf{Q}[X]$ tels que:

$$(2.5.1) \qquad 0 < p(n) \leqq f_{\bar{I}}(n) \quad \text{pour } n \neq 0 \text{ et } n \equiv O(l_1) \quad \text{avec } \deg p(X) = s-1.$$

Mais, d'autre part, d'après les lemmes 1.3 et 2.4, on a:

$$(2.5.2) \qquad f_{\bar{I}}(n) \leqq f_I(n) - f_I(n-k_1) \qquad \text{pour } n \geqq k_1.$$

Prenons $k = l_1 k_1$. Il est clair que (2.5.1) (respectivement (2.5.2)) reste vrai avec k au lieu de l_1 (respectivement k_1).

D'où: quelque soit $n \geqq k$ tel que $n \equiv O(k)$ on a:

$$(2.5.3) \qquad 0 < p(n) \leqq f_{\bar{I}}(n) \leqq f_I(n) - f_I(n-k).$$

Prenons $n = tk$. On a alors les inégalités suivantes:

$$0 < p(tk) \leqq f_I(tk) - f_I(tk - k),$$
$$0 < p(tk - k) \leqq f_I(tk - k) - f_I(tk - 2k),$$
$$\dots \qquad \dots \qquad \dots$$
$$0 < p(2k) \leqq f_I(2k) - f_I(k),$$
$$0 < p(k) \leqq f_I(k).$$

On en déduit:

$$0 < \sum_{i=1}^{t} p(ik) \leqq f_I(tk).$$

Comme $\Sigma_{i=1}^{t} p(ik)$ est un polynôme de degré s en tk à coefficients rationnels, on obtient que le degré de f est minoré par s. Comme d'autre part, d'après la proposition 1.4, f est majorée par un polynôme de deqré s, son degré au sens de la définition 2.3 est s.

2.6. Corollaire. *Dans les hypothèses du théorème* 2.5, *la dimension de f au sens de la dimension de Gelfand–Kirillov est égale à s* ([1]).

Preuve. En effet,

$$\dim f = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\operatorname{Log} f(n)}{\operatorname{Log} n} = \inf\{\gamma \in \mathbf{R}/f(n) \leqq n^{\gamma}\}.$$

Il est clair que $\dim f \leqq s$.

D'autre part, si $\dim f$ était égale à $\delta < s$, on aurait sur une infinité de points un polynôme de degré s majoré par n^{δ} avec $\delta < s$, ce qui est impossible.

2.7. Le théorème 2.5 et son corollaire 2.6 s'appliquent en particulier dans les deux cas suivants:

(1) Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie nilpotente de dimension s sur un corps K, $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ son algèbre eveloppante et $\mathcal{G}\mathcal{U}(\mathcal{G})$ l'idéal d'augmentation de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ que nous allons noter par $\mathcal{M}$. D'après [8], $\mathcal{M}$ vérifie la propriété d'Artin–Rees forte par rapport à tout idéal de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$. On en déduit que la fonction $f_{\mathcal{M}}(n) = \dim_K(A/\mathcal{M}^{n+1})$ est de degré s, puisqu'une base de $\mathcal{G}$ adaptée à sa suite centrale ascendante donne une $\mathcal{U}(\mathcal{G})$-suite centralisante génératrice de $\mathcal{M}$. Dans le paragraphe 3, nous donnons une version plus précise de cette propriété. Ce résultat être comparé dans le cas nilpotent à ceux de [1] qui mènent à la détermination de la GK-dimension d'une algèbre enveloppante.

(2) Soit K un corps et G un groupe nilpotent de type fini et sans torsion. D'après [2] et [5], un tel groupe est caractérisé par l'existence d'une suite de sous-groupes:

$$G = G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_{r+1} = \{1\}$$

telle que:

(a) G_i/G_{i+1} est un groupe cyclique infini pour $1 \leqq i \leqq r$,

(b) $[G_i, G] \subset G_{i+1}$.

La longueur d'une telle suite est un invariant du groupe G, qu'on appelle le rang de G.

Lemme. *Avec les notations ci-dessus, l'idéal d'augmentation de $K[G]$, algèbre du groupe G, est engendré par une $K[G]$-suite centralisante de r éléments.*

Preuve. On procède par récurrence sur r. Si $r = 1$, on a: $G \simeq \mathbf{Z}$ et $K[G] = K[T, T^{-1}]$ où T est une indéterminée commutative. $K[G]$ est donc intègre est si g est un générateur de G, $(g-1)$ engendre l'idéal d'aumentation de $K[G]$.

Supposons $r > 1$ et considérons le groupe $\bar{G} = G/G_r$; $\bar{G}$ est un groupe nilpotent de type fini et sans torsion d'après la caractérisation rappelée ci-dessus.

On a l'isomorphisme: $K[\bar{G}] \simeq K[G]/\omega(G_r)$ où $\omega(G_r)$ est l'idéal engendré par $g_r - 1$ dans $K[G]$, où g_r désigne un générateur du groupe cyclique infini G_r. L'hypothèse de récurrence termine la preuve compte tenu du fait que $g_r - 1$ est central dans $K[G]$ et non diviseur de zéro puisque $K[G]$ est intègre, d'après le théorème 3.2 du [5].

On montre dans [8] que l'idéal d'augmentation $\mathcal{M}$ de $K[G]$ vérifie la propriété d'Artin Rees forte par rapport à tous les idéaux de $K[G]$. Compte tenu du lemme ci-dessus, la fonction $f_{\mathcal{M}}(n) = \dim_K (K[G]/\mathcal{M}^{n+1})$ est de degré r.

3.1. Soit K un corps, $\mathcal{G}$ une K-algèbre de Lie nilpotente de dimension p. Considérons la suite centrale descendante de $\mathcal{G}$.

$$(3.1.1) \qquad 0 = \mathcal{G}^q \subset \mathcal{G}^{q-1} \subset \cdots \subset \mathcal{G}^2 \subset \mathcal{G}^1 = \mathcal{G} \qquad \text{où } \mathcal{G}^{i+1} = [\mathcal{G}^i, \mathcal{G}]$$

pour $1 \leqq i \leqq q-1$ et q est l'indice de nilpotence de $\mathcal{G}$. Choisissons une base adaptée à la suite (3.1.1): $e_p, e_{p-1}, \cdots, e_2, e_1$ ordonnée et fixée pour le reste de ce paragraphe.

3.2. Définition. On appelle *monôme en les e_i* une expression du type $e_{i_1}^{t_1} e_{i_2}^{t_2} \cdots e_{i_s}^{t_s}$ où les t_i sont des entiers strictement positifs et où les i_j *ne* sont *pas* tous distincts. C'est un élément de l'idéal d'augmentation $\mathcal{M}$ de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$, l'algèbre enveloppante de $\mathcal{G}$.

On appelle monôme standard ([3]) un monôme dans lequel on a:

$$i_1 \geqq i_2 \geqq \cdots \geqq i_s.$$

Appelons hauteur de e_i, le plus grand entier $h(e_i)$ tel que $e_i \in \mathcal{G}^{h(e_i)}$. Si m désigne le monôme $e_{i_1}^{t_1} e_{i_2}^{t_2} \cdots e_{i_s}^{t_s}$ la hauteur de m, notée $h(m)$ sera l'entier $\Sigma_{j=1}^{s} h(e_{i_j}) t_j$. D'après [10], les monômes standard de hauteur $\geqq n$ forment une K-base de $\mathcal{M}^n$, où $\mathcal{M}$ désigne l'idéal d'augmentation de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$.

3.3. Proposition. *Avec les notations ci-dessus, posons* $k_i = h(e_i)$, $1 \leqq i \leqq p$. *Considérons la fonction* $h(n) = \dim_K \mathcal{M}^n / \mathcal{M}^{n+1}$. *Alors*:

(i) $\Sigma_{n \geqq 0} \dim_K \mathcal{M}^n / \mathcal{M}^{n+1} t^n = 1/\Pi_{i=1}^{p}(1 - t^{k_i})$.

(ii) *La fonction* $h(n)$ *est équivalente dans le sens de Gelfand–Kirillov à la fonction polynomiale* $\binom{n+p-1}{p-1}$ ([1]).

Preuve. (i) Les monômes standard de hauteur n forment une K-base de $\mathcal{M}^n / \mathcal{M}^{n+1}$. Il s'ensuit que $h(n) = \operatorname{card}\{(l_1, l_2, \cdots, l_p) / \Sigma_{j=1}^{p} k_j l_j = n\}$.

(ii) Considérons les deux ensembles suivants de p-uples d'entiers naturels:

$$\mathcal{A}(n) = \left\{ (l_1, l_2, \cdots, l_p) \Big/ \sum_{j=1}^{p} k_j l_j = n \right\} \qquad \text{et}$$

$$\mathcal{B}(n) = \left\{ (t_1, t_2, \cdots, t_p) \Big/ \sum_{j=1}^{p} t_j = n \right\}.$$

On a: $\operatorname{card} \mathcal{B}(n) = \binom{n+p-1}{p-1}$ et $\operatorname{card} \mathcal{A}(n) = h(n)$.

L'application $\alpha : \mathcal{A}(n) \to \mathcal{B}(n)$ définie par: $(l_1, l_2, \cdots, l_p) \mapsto (k_1 l_1, k_2 l_2, \cdots, k_p l_p)$ est évidemment injective et on en déduit que $h(n) \leqq \binom{n+p-1}{p-1}$. L'application $\beta : \mathcal{B}(n) \to \mathcal{A}(kn)$ définie par:

$$(t_1, t_2, \cdots, t_p) \mapsto \left(\frac{k}{k_1} t_1, \cdots, \frac{k}{k_p} t_p \right)$$

où $k = \text{p.p.c.m.}\,(k_1, k_2, \cdots, k_p)$ est aussi injective et on en déduit que $\binom{n+p-1}{p-1} \leqq h(kn)$. Par conséquent, $h(n)$ et $\binom{n+p-1}{p-1}$ sont GK-équivalents.

3.4. Avec les notations du 3.1 et 3.2 considérons l'algèbre de Lie nilpotente $\operatorname{gr} \mathcal{G} = \mathcal{G}/\mathcal{G}^2 \oplus \mathcal{G}^2/\mathcal{G}^3 \oplus \cdots \oplus \mathcal{G}^{q-1}$ où le crochet est définit de la façon usuelle.

Définition. On dit qu'une algèbre de Lie nilpotente $\mathcal{G}$ est *graduée* si l'application $\mathcal{G} \to \operatorname{gr} \mathcal{G}$ définie par $e_i \mapsto e_i + \mathcal{G}^{h(l_i)+1}$ est un isomorphisme. Il est clair que $\operatorname{gr} \operatorname{gr} \mathcal{G} \simeq \operatorname{gr} \mathcal{G}$. D'autre part, d'après [10], $\mathcal{U}(\operatorname{gr} \mathcal{G}) \simeq G_{\mathcal{M}}(\mathcal{U}(\mathcal{G}))$ où $G_{\mathcal{M}}(\mathcal{U}(\mathcal{G}))$ désigne l'algèbre graduée associée à la filtration $\mathcal{M}$-adique de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$. L'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente graduée est donc graduée par la hauteur. Remarquons enfin que si x est un élément central de l'algèbre de Lie nilpotente graduée $\mathcal{G}$, alors $\mathcal{G}/Kx$ est aussi une algèbre de Lie nilpotente graduée.

3.5. Théorème. *Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie nilpotente de dimension p sur un corps K et $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ son algèbre enveloppante. Considérons un $\mathcal{U}(\mathcal{G})$-module de type fini M et la série de Hilbert associée $\Sigma_{n\geqq 0}(\dim_K \mathcal{M}^m M/\mathcal{M}^{m+1}M)t^n$, où $\mathcal{M}$ désigne l'idéal d'augmentation de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$. Alors*:

$$\sum_{n\geqq 0}\dim_K \frac{\mathcal{M}^n M}{\mathcal{M}^{n+1}M}\,t^n = \frac{f(t)}{\prod_{i=1}^{p}(1-t^{k_i})}$$

où les k_i sont comme dans 3.3 *et* $f(t)\in\mathbf{Z}[t]$.

Preuve. (a) Supposons d'abord l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ graduée et le module M gradué sur l'algèbre graduée $\mathcal{U}(\mathcal{G})$. On peut donc écrire $M=\bigoplus_{n\geqq 0}M_n$. Montrons que $\Sigma_{n\geqq 0}(\dim_K M_n)t^n = f(t)/\Pi_{i=1}^{p}(1-t^{k_i})$ avec $f(t)\in\mathbf{Z}[t]$. On procède par récurrence sur p.

Si $p=1$, c'est le cas commutatif.

Si $p>1$, considérons la base fixée au 3.1: $(e_p, e_{p-1},\cdots, e_2, e_1)$ et $h_i=h(e_i)$, $1\leqq i\leqq p$. Comme $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ est graduée par la hauteur, e_p est homogène de hauteur k_i et central. La multiplication par e_p est un $\mathcal{U}(\mathcal{G})$-endomorphisme de M et pour tout n, on obtient la suite exacte:

$$0\to K_n\to M_n\to M_{n+k_p}\to L_{n+k_p}\to 0.$$

On finit la démonstration comme dans le cas commutatif compte tenu du fait que:

$$\frac{\mathcal{U}(\mathcal{G})}{e_p\mathcal{U}(\mathcal{G})}\simeq \mathcal{U}\left(\frac{\mathcal{G}}{Ke_p}\right)$$

et le fait que $\mathcal{G}/Ke_p$ est une algèbre de Lie nilpotente graduée dans laquelle $h(\bar{e}_i)=k_i$ pour $1\leqq i\leqq p-1$.

(b) Dans le cas général, remarquons que le module gradué $G_{\mathcal{M}}(M)=\bigoplus_{n\geqq 0}\mathcal{M}^n M/\mathcal{M}^{n+1}M$ est de type fini sur l'anneau $G_{\mathcal{M}}(\mathcal{U}(\mathcal{G}))$ et que $G_{\mathcal{M}}(\mathcal{U}(\mathcal{G}))$ est isomorphe comme algèbre graduée à $\mathcal{U}(\operatorname{gr}\mathcal{G})$. Enfin, pour tout i, la hauteur de e_i est la même que la hauteur de l'image de e_i dans $\operatorname{gr}\mathcal{G}$.

3.6. Soit G un groupe nilpotent de type fini et K un corps de caractéristique 0. Considérons la suite centrale descendante de G:

$$G = G^1 \supset G^2 \supset \cdots \supset G^q = \{1\}, \tag{3.6.1}$$

où $G^{i+1} = [G^i, G]$ pour $1 \leqq i \leqq q-1$ et où q est l'indice de nilpotence de G.

Si $\operatorname{gr} G$ désigne le groupe abélien $\bigoplus_{i=1}^{q-1} G^i/G^{i+1}$, on peut associer à G l'algèbre de Lie nilpotente $\operatorname{gr} G \bigotimes_{\mathbf{Z}} K$, où le crochet est défini à l'aide du crochet dans G ([9]). Si $\mathcal{M}$ désigne l'idéal d'augmentation de l'algèbre du groupe $K[G]$, on démontre dans [9], que:

$$G_{\mathcal{M}}(K[G]) \simeq \mathcal{U}\left(\operatorname{gr} \bigotimes_{\mathbf{Z}} K\right). \tag{3.6.2}$$

L'algèbre de Lie $\operatorname{gr} G \bigotimes_{\mathbf{Z}} K$ est nilpotente graduée de sorte que l'isomorphisme (3.6.2) est un isormorphisme d'algèbre graduées.

Soit M un $K[G]$-module de type fini. La méthode du passage au gradué utilisée dans le théorème 3.5 permet de démontrer que:

$$\sum_{n \geqq 0} \left(\dim_K \frac{\mathcal{M}^n M}{\mathcal{M}^{n+1} M}\right) t^n = \frac{f(t)}{\prod_{i=1}^{p} (1 - t^{k_i})},$$

où $f(t) \in \mathbf{Z}[t]$ et où les k_i proviennent de l'algèbre de Lie $\operatorname{gr} \mathcal{G} \bigotimes_{\mathbf{Z}} K$ comme dans 3.3. La proposition suivante détermine les entiers k_i dans le groupe G.

3.7. Soit G un groupe nilpotent de type fini et (3.6.1) sa suite centrale descendante. Considérons un système de générateurs de G:

$$g_1, g_2, \cdots, g_{l_1}, g_{l_1+1}, \cdots, g_{l_2}, g_{l_2+1}, \cdots, g_{l_{q-1}} \tag{3.7.1}$$

où $g_{l_i+1}, g_{l_i+2}, \cdots, g_{l_{i+1}}$ est un système de générateurs du groupe nilpotent de type fini G^i/G^{i+1}, $1 \leqq i \leqq q-1$. Soit h_j, la hauteur de g_j, $1 \leqq j \leqq l_{q-1}$, le plus grand entier tel que $g_j \in G^{h_j}$. Comme $\operatorname{gr} G \bigotimes_{\mathbf{Z}} K \simeq \bigoplus_{i=1}^{q-1} G^i/G^{i+1} \bigotimes_{\mathbf{Z}} K$, on peut extraire du système générateur (3.7.1) une suite d'éléments:

$$g_{i_1}, g_{i_2}, \cdots, g_{i_s}$$

dont les images dans $\operatorname{gr} G \bigotimes_{\mathbf{Z}} K$ forment une K-base de $\operatorname{gr} G \bigotimes_{\mathbf{Z}} K$. Il suffit de prendre les éléments *non de torsion* dans $g_{l_i+1}, \cdots, g_{l_{i+1}}$ pour $1 \leqq i \leqq q-1$. On obtient donc la proposition suivante:

PROPOSITION. *Avec les notations ci-dessus, soit h_{i_k} la hauteur de g_{i_k}, $1 \leqq k \leqq s$. Si M est un module de type fini sur $K[G]$, alors*:

$$\sum_{n \geqq 0} \dim_K \frac{\mathcal{M}^n M}{\mathcal{M}^{n+1} M} t^n = \frac{f(t)}{\prod_{k=1}^{s} (1 - t^{h_{i_k}})}$$

où $f(t) \in \mathbf{Z}[t]$.

PREUVE. En effet, les entiers h_{i_k} ne dépendent pas du système générateur (3.7.1) choisi. Ils proviennent des espaces vectoriels $G^i/G^{i+1} \otimes_{\mathbf{Z}} K$, pour $1 \leqq i \leqq q-1$.

RÉFÉRENCES

1. W. Bohro und H. Kraft, *Über die Gelfand-Kirillov Dimension*, Math. Ann. **220** (1976), 1–24.

2. K. A. Hirsch, *On infinite soluble groups V*, J. London Math. Soc. **29** (1954), 250–251.

3. N. Jacobson, *Lie Algebras*, Interscience Publishers, 1962.

4. A. V. Jategaonkar, *Integral group rings of polycyclic by finite groups*, J. Pure Appl. Algebra **4** (1974), 337–343.

5. S. A. Jennings, *The group ring of a class of infinite nilpotent groups*, Canad. J. Math. **7** (1955), 169–187.

6. M. A. Knus, *On the enveloping algebra and the descending central series of a Lie algebra*, J. Algebra **12** (1969), 335–338.

7. J. C. McConnell, *The intersection theorem for a class of non-commutative rings*, Proc. London Math. Soc. **17** (1967), 487–498.

8. P. F. Pickel, *Rational cohomology of nilpotent groups and Lie algebras*, Comm. Algebra **6** (4) (1978), 409–419.

9. D. Quillen, *On the associated graded ring of a group ring*, J. Algebra **10** (1968), 411–418.

10. M. Vergne, *Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes*, Bull. Soc. Math. France **98** (1970), 81–116.

11. R. Walker, *Local rings and normalizing sets of elemens*, Proc. London Math. Soc. **24** (1972), 27–45.

12. O. Zariski and P. Samuel, *Commutative Algebra*, Vol. II, D. Van Nostrand Company, Inc., 1960.

UNIVERSITE DE PARIS VI
4 PLACE JUSSIEU
75230 PARIS CEDEX 05, FRANCE